



## EFEKT RYZYKA W TLE NA POPYT NA SAMOUBEZPIECZENIE ZDROWOTNE

**Piotr Dudziński**

### **Streszczenie**

Artykuł wprowadza dwuetapowy model procesu decyzyjnego dotyczącego optymalnego poziomu samoubezpieczenia zdrowotnego w sytuacji gdy istnieją dwa niezależne źródła ryzyka z których jedno (ryzyko w tle) nie jest możliwe do ubezpieczenia. Analiza modelu prowadzi do wniosku, że kierunek efektu wprowadzenia takiego ryzyka na popyt na samoubezpieczenie zależy od tego, czy ryzyko dotyczy okresu w którym podejmowana jest decyzja o samoubezpieczeniu, czy występuje po podjęciu tej decyzji. W pierwszym przypadku następuje redukcja popytu na samoubezpieczenie, zaś w drugim jego wzrost. Dla wyniku istotne jest założenie o przezorności decydenta wyrażające się dodatnim znakiem pochodnej trzeciego rzędu funkcji użyteczności. Ponadto zaprezentowana została ekonomiczna interpretacja udowodnionych twierdzeń tłumacząca powody zmiany kierunku badanego efektu.

**Słowa kluczowe:** samoubezpieczenie, ryzyko w tle, awersja do ryzyka

### **Wstęp**

Samoubezpieczenie zdrowotne polega na inwestycji w produkt, którego zadaniem jest redukcja utraty zdrowia w efekcie choroby, wypadku, starzenia się, itp. Polega zatem na takiej redukcji zasobów materialnych, która zmniejszy ewentualne straty w sferze niematerialnej. Przykładem samoubezpieczenia zdrowotnego jest przede wszystkim dodatkowe, prywatne ubezpieczenie zdrowotne, ale także rehabilitacja po wypadku lub chorobie finansowana z własnych środków. Pojęcie samoubezpieczenia jest jednak na tyle ogólne, że może zawierać jeszcze inne możliwości. Osoba, która się zdrowo odżywia, uprawia ćwiczenia fizyczne, zażywa witaminy, itp. ma na ogół silniejszy organizm i w razie choroby lub wypadku, utrata zdrowia jest u niej mniejsza niż w przypadku osoby nie dbającej o zdrowie. Jednakże wymienione aktywności wiążą się na ogół z pewnymi wydatkami – są więc przykładem samoubezpieczenia zdrowotnego.

Samoubezpieczenie jako pojęcie zostało wprowadzone do literatury ekonomicznej przez Ehrlicha i Beckera (1972) dla opisu jednego z możliwych narzędzi zarządzania ryzykiem w sferze materialnej. Jednak dopiero od niedawna badane jest zastosowanie tego pojęcia w sferze

strat niematerialnych, przede wszystkim zdrowotnych. Analiza i zrozumienie procesów decyzyjnych w takiej sytuacji wymaga użycia dwuargumentowej funkcji użyteczności, odzwierciedlającej poziom satysfakcji decydenta zależnej od dwóch czynników, wysokości aktualnie posiadanego majątku (ogólnie poziomu bogactwa) i stanu zdrowia w danym okresie. Dwuwymiarowa funkcja użyteczności była wprowadzona i badana w teorii awersji ryzyka przez takich autorów jak Kihlstrom i Milman (1974), Pratt (1988), Finkelshtain, Kella i Scarsini (1999). W ostatnich latach stała się ona przedmiotem badań takich autorów jak Courbage i Rey (2007), Menegatti (2009), Denuit, Eeckhoudt i Menegatti (2011), którzy głównie analizowali na nowo zjawisko oszczędności generowanych przez ryzyko w sferze materialnej, jak i niematerialnej. W kontekście samoubezpieczenia dwuwymiarową użyteczność badał Lee (2005) pod kątem efektu dochodowego na smoubezpieczenie strat w sferze materialnej i w niematerialnej. We wspomnianej pracy autorstwa Denuit, Eeckhoudt i Menegatti (2011) pojawił się i był analizowany także model inwestycji w poprawę zdrowia w przyszłości, który jest najbliższy omawianemu w niniejszej pracy, ale nie w terminach samoubezpieczenia zdrowotnego.

Kolejną cechą proponowanego w niniejszej pracy modelu samoubezpieczenia zdrowotnego jest to, że jest on dwuokresowy, a zatem uwzględnia stan majątkowy oraz zdrowotny zarówno w teraźniejszości jak i w przyszłości. Ryzyko związane ze zdrowiem może występować w każdym z tych okresów. Pozwala to na opis i analizę sytuacji, kiedy decyzja na temat wielkości inwestycji w samoubezpieczenie jest podejmowana w okresie, gdy ryzyko zagrożenia zdrowia jeszcze nie występuje oraz sytuacji, gdy ta decyzja jest podejmowana w warunkach ryzyka. Jest zatem możliwe porównanie popytu na samoubezpieczenie w obu tych przypadkach. Głównym celem pracy jest wskazanie efektu jaki ma na poziom samoubezpieczenia wprowadzenie tzw. ryzyka w tle dotyczącego zdrowia. Jest to drugie źródło ryzyka, które jest niezależne od pierwszego i nie podlega możliwości ubezpieczenia. Przykładami takiego ryzyka są obciążenia genetyczne, pogorszenie warunków życia lub warunków pracy, zanieczyszczenie środowiska naturalnego. W niniejszej pracy udowodnione zostały twierdzenia mówiące, że jeśli niezależne ryzyko w tle dotyczy zdrowia w przyszłości, to skutkuje to wzrostem popytu na samoubezpieczenie zdrowotne, jeśli zaś ryzyko w tle zagraża zdrowiu w momencie podejmowania decyzji, to skutkuje to redukcją popytu na samoubezpieczenie. Oba twierdzenia zostały udowodnione przy założeniu, że odpowiednia pochodna użyteczności trzeciego rzędu jest dodatnia. Własność taka nazywa się przezornością (Kimball, 1990) i jest determinantą wzrostu oszczędności w reakcji na przyszłe ryzyko dotyczące majątku decydenta (Leland 1968, Sandmo 1970, Courbage i Rey 2007). Założenie przezorności decydenta uchodzi w literaturze ekonomicznej za naturalne, spełnia je każda z typowych funkcji użyteczności.

## 1. Podstawowy dwuokresowy model samoubezpieczenia zdrowotnego

Oznaczmy przez  $w$  bogactwo decydenta, zaś przez  $h$  – jego stan zdrowia. Zakładamy, że użyteczność decydenta jest postaci  $u(w, h)$  w pierwszym okresie (w teraźniejszości) oraz  $v(w, h)$  w okresie drugim (w przyszłości). Zakładamy, że obie funkcje użyteczności są rosnące i wklęsłe względem każdej zmiennej oraz że są wklęsłe (globalnie, ze względu na dwie zmienne) i trzykrotnie różniczkowalne. Matematycznie jest to wyrażone nierównościami

$$u_w > 0, u_h > 0, u_{ww} \leq 0, u_{hh} \leq 0,$$

$$u_{ww}u_{hh} - (u_{wh})^2 \geq 0, v_{ww}v_{hh} - (v_{wh})^2 \geq 0.$$

W pierwszym okresie stan zdrowia jest znany i oznaczany przez  $h_0$ , zaś w drugim  $h_1$ . Bogactwo w teraźniejszości oznaczone jest symbolem  $w_0$ , zaś w przyszłości jako  $w_1$ . Stan majątkowy w obu okresach jest znany i nie dotyczy go żadne ryzyko. Decydent w pierwszym

okresie zmniejsza swój stan majątkowy o wielkość  $e$ , którą inwestuje w samoubezpieczenie przeciw utracie zdrowia w przyszłości. Przyszły stan zdrowia jest zagrożony stratą w wysokości  $l(e)$ , która zależy od inwestycji w samoubezpieczenie. Im większa inwestycja w samoubezpieczenie, tym mniejszy rozmiar straty, co zapisuje się nierównością  $l' \leq 0$ . Prawdopodobieństwo straty wynosi  $p$ .

W proponowanym modelu wysokość straty zależy tylko od poziomu samoubezpieczenia, a nie od stanu świata (zdrowia). Dotyczy to sytuacji zagrożenia wypadkiem określonego rodzaju lub chorobą (np. zawodową), zaś samoubezpieczenie dotyczy np. zakupu dodatkowego pakietu zdrowotnego obejmującego opiekę lekarską i rehabilitację na wyższym niż dotychczas poziomie, co przekłada się na różne poziomy kosztu wyrażonego przez wielkość  $e$ .

Problem decydenta polega na doborze wielkości samoubezpieczenia  $e$ , która zmaksymalizuje całkowitą użyteczność

$$u(w_0 - e, h_0) + pv(w_1, h_1 - l(e)) + (1 - p)v(w_1, h_1) \quad (1)$$

Warunek konieczny (pierwszego rzędu) istnienia maksimum funkcji użyteczności jest postaci

$$-u_w(w_0 - e, h_0) + pv_h(w_1, h_1 - l(e))(-l'(e)) = 0 \quad (2)$$

Warunek dostateczny (drugiego rzędu)

$$u_{ww}(w_0 - e, h_0) + p \left[ v_{hh}(w_1, h_1 - l(e))(-l'(e))^2 + v_h(w_1, h_1 - l(e))(-l''(e)) \right] < 0$$

jest automatycznie spełniony na mocy przyjętych założeń.

Oznaczmy przez  $e_0$  optymalny poziom samoubezpieczenia spełniający warunek (2).

## 2. Model z ryzykiem w tle

Załóżmy teraz, że w drugim okresie zdrowie nie jest znane z pewnością, tylko z określonym prawdopodobieństwem w każdym stanie świata. Zdrowie w przyszłości opisuje zmienna losowa ciągła którą oznaczать będziemy  $\tilde{h}$ . Reprezentuje ona ryzyko zdrowotne w tle. Jest ono niezależne od podstawowego źródła ryzyka i nie ma możliwości ubezpieczenia się od jego skutków. Zdrowie jest obciążone zatem dwoma źródłami ryzyka: jedno jest wyrażone zagrożeniem utratą zdrowia wysokości  $l(e)$ , na które można wpływać poprzez inwestycję w samoubezpieczenie, zaś drugie jest określone przez zmienną losową  $\tilde{h}$ , której rozkład prawdopodobieństwa jest znany, ale na który decydent nie ma wpływu.

Problem decydenta polega na takim doborze wielkości  $e$ , który zmaksymalizuje całkowitą użyteczność

$$EU = u(w_0 - e, h_0) + pEv(w_1, \tilde{h} - l(e)) + (1 - p)Ev(w_1, \tilde{h})$$

Warunek konieczny pierwszego rzędu jest postaci

$$EU' = -u_w(w_0 - e, h_0) + pEv_h(w_1, \tilde{h} - l(e))(-l'(e)) = 0 \quad (3)$$

Niech  $e^*$  oznacza optymalny poziom samoubezpieczenia spełniający warunek (3).

Warunek dostateczny (drugiego rzędu)

$$u_{ww}(w_0 - e, h_0) + pE \left[ v_{hh}(w_1, \tilde{h} - l(e))(-l'(e))^2 + v_h(w_1, \tilde{h} - l(e))(-l''(e)) \right] < 0 \quad (4)$$

jest spełniony na mocy przyjętych założeń.

### 3. Efekt zdrowotnego ryzyka w tle w drugim okresie na popyt na samoubezpieczenie

Aby móc porównywać rozwiązania pochodzące z obu modeli, przyjmijmy, że  $h_1 = E\tilde{h}$ , tzn., że poziom zdrowia w przyszłości w pierwszym modelu jest równy wartości oczekiwanej zdrowia w modelu z ryzykiem w tle.

Zauważmy, że spełniony warunek (4) oznacza, że  $EU'' < 0$ , a zatem funkcja krańcowej użyteczności  $EU'$  jest malejąca. Dla porównania wielkości  $e_0$  i  $e^*$  należy więc oszacować znak  $EU'$  w punkcie  $e_0$ . Miejscem zerowym malejącej funkcji  $EU'$  jest  $e^*$ ; jeśli zatem  $EU'(e^*) > 0$ , to  $e_0 < e^*$ , innymi słowy – czy po wprowadzeniu ryzyka w tle optymalny poziom samoubezpieczenia wzrósł. Jeśli  $EU'(e^*) < 0$ , to musi zachodzić  $e_0 > e^*$ , czyli że wprowadzenie ryzyka w tle spowodowało zmniejszenie popytu na samoubezpieczenie.

Z warunku (2) otrzymujemy  $-u_w(w_0 - e_0, h_0) = -pv_h(w_1, h_1 - l(e))(-l'(e))$ . Podstawiając tę równość do (3) otrzymujemy

$$EU'(e_0) = -pv_h(w_1, h_1 - l(e_0))(-l'(e_0)) + pEv_h(w_1, \tilde{h} - l(e_0))(-l'(e_0))$$

Po niewielkich przekształceniach dostajemy

$$EU'(e_0) = p(-l'(e_0))[Ev_h(w_1, \tilde{h} - l(e_0)) - v_h(w_1, h_1 - l(e_0))] \quad (5)$$

Na mocy definicji funkcji straty, jej pochodna jest ujemna, więc czynnik  $p(-l'(e_0))$  jest dodatni, a zatem nie ma wpływu na znak wyrażenia (5).

Zauważmy, że jeśli ustalimy wartości  $w_1$  i  $e_0$ , to funkcja  $f(x) = v_h(w_1, x - l(e_0))$  zależy tylko od jednej zmiennej. Interesująca nas nierówność

$$v_h(w_1, h_1 - l(e_0)) \leq Ev_h(w_1, \tilde{h} - l(e_0))$$

jest zatem równoważna nierówności  $Ef(\tilde{h}) \geq f(E\tilde{h})$ , która jest po prostu nierównością Jensena dla funkcji wypukłych. Warunek wypukłości to  $f'' \geq 0$ , a zatem  $v_{hhh} \geq 0$ .

Warunek  $v_{hhh} \geq 0$  należy interpretować ekonomicznie jako „przezorność względem zdrowia w drugim okresie” przez analogię do doskonale znanego i opisanego w literaturze pojęcia przezorności dla funkcji użyteczności zależnej od jednej zmiennej (Kimball 1990). Pozwala to na sformułowanie następującej tezy:

**Twierdzenie.** *Jeśli decydent wykazuje przezorność względem zdrowia w drugim okresie, to wprowadzenie ryzyka związanego ze stanem zdrowia w drugim okresie powoduje wzrost wydatków na samoubezpieczenie zdrowotne.*

### 4. Efekt zdrowotnego ryzyka w tle w pierwszym okresie na popyt na samoubezpieczenie

Aby analiza modelu była kompletna, należy także zbadać efekt wprowadzenia ryzyka związanego ze zdrowiem w pierwszym okresie. Model odwzorowujący tę sytuację polega na maksymalizacji oczekiwanej użyteczności

$$EV = Eu(w_0 - e, \tilde{h}) + pv(w_1, h_1 - l(e)) + (1 - p)v(w_1, h_1)$$

Podobnie jak wcześniej, warunek pierwszego rzędu przyjmuje postać

$$EV' = -Eu_w(w_0 - e, \tilde{h}) + pv_h(w_1, h_1 - l(e))(-l'(e)) = 0 \quad (6)$$

i wyznacza optymalny poziom inwestycji w samoubezpieczenie  $e^{**}$  który spełnia warunek drugiego rzędu

$$EV'' = Eu_{ww}(w_0 - e, \tilde{h}) +$$

$$+p \left[ v_{hh}(w_1, h_1 - l(e))(-l'(e))^2 + v_h(w_1, h_1 - l(e))(-l''(e)) \right] < 0$$

Model bez ryzyka jest taki jak w (1), przy czym zmiana polega na tym, że  $h_0 = E\tilde{h}$ . Rozwiązanie problemu bez ryzyka oznaczone ponownie będzie przez  $e_0$ . Warunek pierwszego rzędu mówi, że funkcja  $EV'$  ma miejsce zerowe w punkcie  $e^{**}$ . Z warunku drugiego rzędu, funkcja  $EV'$  jest malejąca. Tak jak poprzednio, badamy znak funkcji  $EV'$  w punkcie  $e_0$ . Z warunku (2) wyznaczamy

$$pv_h(w_1, h_1 - l(e_0))(-l'(e_0)) = u_w(w_0 - e_0, h_0)$$

Po podstawieniu do (6) można napisać

$$EV'(e_0) = u_w(w_0 - e_0, h_0) - Eu_w(w_0 - e_0, \tilde{h})$$

Wprowadzenie oznaczenia  $f(x) = u_w(w_0 - e_0, x)$  pozwala na zapisanie równoważności

$$EV'(e_0) \leq 0 \Leftrightarrow f(E[\tilde{h}]) \leq E[f(\tilde{h})]$$

Prawa strona powyższej nierówności jest nierównością Jensena dla funkcji wypukłych, zachodzącą przy warunku  $f'' \geq 0$ , co jest równoważne nierówności  $u_{whh} \geq 0$ , gdyż  $w_0$  i  $e_0$  są ustalonymi wielkościami.

Interpretacja nierówności  $u_{whh} \geq 0$  jest nieco bardziej skomplikowana niż w przypadku  $u_{hhh} \geq 0$ , ale jest ona możliwa. Można ją znaleźć w pracy Eeckhoudta i in. (2007), gdzie autorzy określają ją jako „krzyżową przezorność względem majątku” („cross-prudence in wealth”). Oznacza to, że wzrost bogactwa powoduje redukcję negatywnego wpływu ryzyka w tle na poziom optymalnego poziomu zmiennej decyzyjnej. W przypadku Eeckhoudta i in. (2007) oraz Menegattiego (2009) zmienną tą był poziom oszczędności.

Podsumowując, można sformułować:

**Twierdzenie.** *Jeśli decydent wykazuje krzyżową przezorność względem majątku w pierwszym okresie, czyli zachodzi nierówność  $u_{whh} \geq 0$ , to wprowadzenie ryzyka związanego ze zdrowiem w pierwszym okresie redukuje inwestycję w samoubezpieczenie zdrowotne.*

## 5. Interpretacja ekonomiczna

Wprowadzenie ryzyka w tle może więc podnosić lub obniżać popyt na samoubezpieczenie. Ten pozornie paradoksalny wynik ma jednak uzasadnienie ekonomiczne. Przeanalizujmy ponownie warunek konieczny modelu bez ryzyka (2):

$$-u_w(w_0 - e, h_0) + pv_h(w_1, h_1 - l(e))(-l'(e)) = 0$$

Pierwszy składnik wyrażenia po lewej stronie jest ujemny (bo pochodna reprezentująca krańcową użyteczność względem bogactwa jest dodatnia), zaś drugi składnik jest dodatni, gdyż krańcową użyteczność względem zdrowia jest dodatnia, zaś pochodna funkcji straty jest zawsze ujemna. Wobec tego, pierwszy składnik reprezentuje krańcowy koszt samoubezpieczenia (ze znakiem „minus”), zaś drugi składnik należy interpretować jako krańcową korzyść płynącą z samoubezpieczenia. W punkcie optymalnym te dwie wielkości się zrównują.

Wprowadzenie ryzyka do modelu powoduje, że warunek konieczny (3) modyfikuje się tak, że pierwszy składnik pozostaje nie zmieniony, zaś drugi składnik zmienia się na wartość oczekiwaną krańcowej użyteczności, czyli  $pEv_h(w_1, \tilde{h} - l(e))(-l'(e))$ . Naturalne założenie o przezorności względem zdrowia w drugim okresie wyrażające się nierównością  $v_{hhh} \geq 0$  jest równoważne temu, że  $v_h(w_1, h_1 - l(e_0)) \leq Ev_h(w_1, \tilde{h} - l(e_0))$ . To oznacza, że wprowadzenie ryzyka do modelu w drugim okresie powoduje wzrost krańcowej korzyści płynącej z tego samego poziomu samoubezpieczenia przy zachowaniu tych samych kosztów.

Zatem decydent po wprowadzeniu ryzyka w drugim okresie i pozostawieniu niezmiennego poziomu inwestycji w samoubezpieczenie nie jest w położeniu równowagi. Krańcowa korzyść przeważa nad krańcowymi kosztami, więc optymalne jest zwiększenie inwestycji w samoubezpieczenie.

Wprowadzenie z kolei ryzyka w pierwszym okresie powoduje, że w warunku pierwszego rzędu zmienia się pierwszy składnik (reprezentujący krańcowe koszty inwestycji w samoubezpieczenie) równości z  $-u_w(w_0 - e, h_0)$  na  $-Eu_w(w_0 - e, \tilde{h})$ . Drugi składnik (reprezentujący krańcowe korzyści) pozostaje nie zmieniony. Założenie o krzyżowej przezorności względem majątku w pierwszym okresie, wyrażone nierównością  $u_{whh} \geq 0$ , powoduje, że zachodzi nierówność  $u_w(w_0 - e, h_0) \leq Eu_w(w_0 - e, \tilde{h})$ , a więc

$$-u_w(w_0 - e, h_0) \geq -Eu_w(w_0 - e, \tilde{h})$$

Zatem wprowadzenie ryzyka w pierwszym okresie powoduje wzrost kosztów krańcowych przy takiej samej krańcowej korzyści jeśli inwestycja w samoubezpieczenie pozostaje ta sama. To oznacza, że nie jest ona już optymalna. Krańcowe koszty przeważają nad krańcową korzyścią, więc optymalne dla decydenta jest tym razem zmniejszenie inwestycji w samoubezpieczenie, aż do poziomu wyznaczonego przez równanie (6).

## Podsumowanie

Wprowadzenie dodatkowego zagrożenia zdrowia niezależnym ryzykiem w tle powoduje zmianę optymalnego poziomu samoubezpieczenia zdrowotnego. Jeśli decydent wykazuje przezorność, to przyszłe zagrożenie powoduje wzrost poziomu samoubezpieczenia, zaś zagrożenie współczesne redukuje ten poziom. Ten wynik wskazuje na to że popyt na samoubezpieczenie może zależeć także od innych czynników, których opisany w tej pracy model nie uwzględnia. Takimi czynnikami mogą być inne źródła ryzyka, np. zagrożenie wysokości przyszłych dochodów. W tej chwili nie ma wiedzy teoretycznej na ten temat, wypełnienie tej luki jest naturalnym kierunkiem dla rozwoju teorii samoubezpieczenia. Innym kierunkiem przyszłych badań powinno być zagadnienie wpływu ryzyk które nie są niezależne od podstawowego. Ciekawym tematem byłby wpływ dodatkowego ryzyka w jakiś sposób skorelowanego z ryzykiem zredukowanym przez inwestycję w samoubezpieczenie.

## Literatura

1. Courbage, C., Rey, B., *Precautionary saving in the presence of other risks*, Econ. Theory 32 (2007), 417-424
2. Denuit, M. M., Eeckhoudt, L., Menegatti, M., *Correlated risks, bivariate utility and optimal choices*, Econ Theory 46 (2011), 39-54
3. Eeckhoudt, L., Rey, B., Schlesinger, H., *A good sign for multivariate risk taking*, Manage. Sci. 53 (2007), 117-124
4. Ehrlich, L., Becker, G., *Market insurance, self insurance and self protection*, J Polit Econ 80 (1972) 623-648
5. Finkelshtain, I., Kella, O., Scarsini, M., *On risk aversion with two risks*, J. Math. Econ. 31 (1999), 239-250
6. Kihlstrom, R. E., Mirman, R. J., *Risk aversion with many commodities*, J Econ Theory 8 (1974), 361-388
7. Kimball, M. S., *Precautionary savings in the small and in the large*, Econometrica 58 (1990), 53-73

8. Lee, K., *Wealth effects on self-insurance and self-protection against monetary and nonmonetary losses*, Geneva Risk and Insurance Review 30 (2005), 147-159
9. Leland, H., *Saving and uncertainty: the precautionary demand for saving*, Q. J. Econ. 82 (1968), 465-4473
10. Menegatti, M., *Optimal saving in the presence of two risks*, J Econ 96 (2009), 277-288
11. Pratt, J. W., *Aversion to one risk in the presence of others*, J Risk Uncertain 1 (1988), 395-413
12. Sandmo, A., *The effect of uncertainty on saving decisions*, Rev. Econ. Stud. 37 (1970), 353-360

## **IMPACT OF BACKGROUND RISK ON SELF-INSURANCE AGAINST HEALTH LOSS**

### **Summary**

This paper introduces two-period model for optimal self-insurance against health loss in the future in the case when there are two independent sources of risk, one of them is non-insurable. We prove that the impact of introduction of background risk on self-insurance depends on the timing. If background risk is contemporaneous with decision-making then it reduces demand for self-insurance; if background risk concerns the future then it increases demand for self-insurance. The result depends on signs of the third partial derivatives of the bivariate utility function. We also provide economic interpretation of the result.

**Keywords:** self-insurance, background risk, risk-aversion

dr Piotr Dudziński  
Uniwersytet Gdański  
Wydział Matematyki, Fizyki i Informatyki  
Instytut Matematyki  
ul. Wita Stwosza 57, 80-952 Gdańsk-Oliwa  
e-mail: pd@mat.ug.edu.pl